

# Calcul différentiel

## Échantillon

*Un chapitre complet en version enseignant,  
suivi des exercices ouverts du chapitre, avec leurs démarches détaillées.*

Le matériel complet comprend sept chapitres en version enseignant et en version étudiant à compléter en classe, une banque de trois cent cinq exercices, cinq séries de révision mélangées, ainsi que six examens avec leurs corrigés et leurs grilles de correction.

# Ce que contient cet échantillon

Ce document réunit deux extraits du matériel de *Calcul différentiel* : un chapitre complet en version enseignant, entièrement rédigé, et les exercices ouverts qui l'accompagnent.

**Les exercices**, tirés de la banque, s'accompagnent de leurs indices, de leurs réponses finales et de leurs démarches détaillées. Comme dans les recueils complets, les réponses ne figurent jamais sur la même page ni en vis-à-vis d'un énoncé : l'étudiant peut chercher sans être tenté.

## Chapitre 4

# La dérivée : définition et interprétation

Tout le calcul différentiel tient dans une seule question : à *quelle vitesse une quantité change-t-elle* ? Si tu connais la position d'un mobile à chaque instant, quelle est sa vitesse *maintenant* ? Si tu connais la taille d'une population chaque année, à quel rythme croît-elle *en ce moment* ?

La réponse s'appelle la *dérivée*, et elle se construit avec les limites du chapitre 2. C'est le chapitre le plus important du cours : prends le temps de bien comprendre chaque étape.

**À la fin de ce chapitre, tu seras capable de...**

- calculer et interpréter un *taux de variation moyen* (TVM), avec ses unités ;
- distinguer clairement un TVM d'un *taux de variation instantané* (TVI) ;
- expliquer le passage de la *sécante* à la *tangente*, graphiquement et numériquement ;
- écrire la *définition de la dérivée* par la limite et l'utiliser pour calculer une dérivée ;
- utiliser indifféremment les notations  $f'(x)$  et  $\frac{dy}{dx}$  ;
- calculer et *interpréter* la dérivée en un point, avec les bonnes unités ;
- déterminer graphiquement si une fonction est *dérivable* en un point, et expliquer le lien entre continuité et dérivabilité.

### 4.1 Le taux de variation moyen

Commençons par une situation concrète. Une voiture parcourt 120 km en 2 heures. Sa vitesse moyenne est

$$\frac{120 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 60 \text{ km/h.}$$

Cela ne veut pas dire que le compteur indiquait 60 tout le temps : c'est une moyenne sur l'intervalle. C'est exactement l'idée du *taux de variation moyen*.

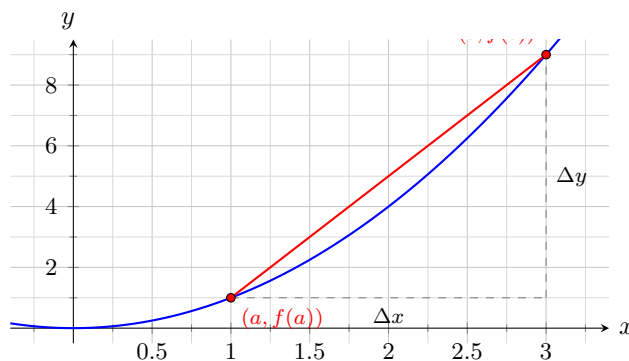
#### Définition 4.1 — Taux de variation moyen (TVM)

Le taux de variation moyen d'une fonction  $f$  entre  $x = a$  et  $x = b$  (avec  $a \neq b$ ) est

$$\text{TVM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{\underline{b - a}}.$$

Géométriquement, c'est la pente de la droite sécante qui passe par les points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ .

**Remarque.** La notation  $\Delta$  (« delta ») signifie « variation de ». Ainsi  $\Delta x = b - a$  est la variation de  $x$ , et  $\Delta y = f(b) - f(a)$  est la variation correspondante de  $y$ . Retiens bien le symbole  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  : on le retrouvera transformé en  $\frac{dy}{dx}$  à la section 4.3.



### Attention

Le TVM dépend *des deux* bornes  $a$  et  $b$ . Changer l'intervalle change le résultat. C'est pour cela qu'on dit « taux de variation moyen **de**  $a$  **à**  $b$  » — ne jamais l'énoncer sans préciser l'intervalle.

### Exemple 4.1 — Calcul et interprétation d'un TVM — exemple modèle

Soit  $f(x) = x^2$ . Calcule le TVM de  $f$  entre  $x = 1$  et  $x = 3$ , puis interprète le résultat.

**Solution.** **Étape 1 — Identifier les valeurs.** Ici  $a = 1$  et  $b = 3$  :

$$f(a) = f(1) = 1^2 = 1, \quad f(b) = f(3) = 3^2 = 9.$$

**Étape 2 — Appliquer la définition.**

$$\text{TVM} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

**Étape 3 — Interpréter.** Entre  $x = 1$  et  $x = 3$ , la fonction augmente en moyenne de 4 unités de  $y$  par unité de  $x$ . Autrement dit, la droite sécante joignant  $(1, 1)$  à  $(3, 9)$  a une pente de 4.

### Exemple 4.2 — TVM en contexte physique

La position d'un mobile est donnée par  $s(t) = 5t^2$ , où  $s$  est en mètres et  $t$  en secondes. Calcule la vitesse moyenne du mobile entre  $t = 2$  s et  $t = 4$  s.

**Solution.**

**Étape 1 — Calculer les positions.**

$$s(2) = 5(2)^2 = 20 \text{ m}, \quad s(4) = 5(4)^2 = 80 \text{ m}.$$

**Étape 2 — Appliquer la définition.**

$$\text{TVM} = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{80 - 20}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

**Étape 3 — Préciser les unités.** Le numérateur est en mètres, le dénominateur en secondes :

$$\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m/s}.$$

**Interprétation.** Entre la 2<sup>e</sup> et la 4<sup>e</sup> seconde, le mobile s'est déplacé à une vitesse moyenne de 30 m/s. Cela ne dit rien de sa vitesse à un instant précis — c'est justement ce que le TVI va nous donner.

### Exemple 4.3 — TVM en contexte biologique

Une culture de bactéries compte  $P(t) = 100 + 20t^2$  individus après  $t$  heures. Calcule le TVM de la population entre  $t = 1$  h et  $t = 3$  h et interprète.

**Solution.**

**Étape 1 — Calculer les populations.**

$$P(1) = 100 + 20(1)^2 = 120, \quad P(3) = 100 + 20(3)^2 = 280.$$

**Étape 2 — Appliquer la définition.**

$$\text{TVM} = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{280 - 120}{2} = 80.$$

**Étape 3 — Unités et interprétation.** Les unités sont des bactéries par heure. Entre la 1<sup>re</sup> et la 3<sup>e</sup> heure, la population a crû en moyenne de 80 bactéries à l'heure.

## 4.2 Du taux moyen au taux instantané

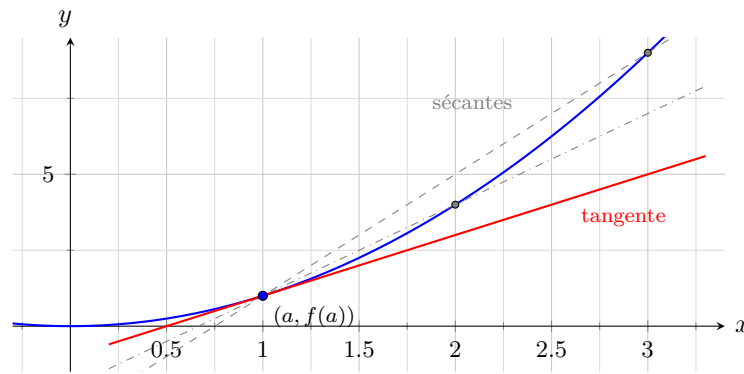
Le TVM décrit un *intervalle*. Mais que se passe-t-il à *un instant précis*? On ne peut pas simplement poser  $b = a$  : on obtiendrait

$$\frac{f(a) - f(a)}{a - a} = \frac{0}{0},$$

une forme indéterminée. La solution : faire *tendre*  $b$  vers  $a$  et prendre la limite. C'est exactement l'outil du chapitre 2.

### 4.2.1 L'approche graphique

Quand  $b$  se rapproche de  $a$ , la droite sécante pivote et tend vers une position limite : la droite tangente à la courbe au point  $(a, f(a))$ .



### 4.2.2 L'approche numérique

Vérifions cette idée avec des nombres. Reprenons  $f(x) = x^2$  au point  $a = 1$ , et calculons le TVM entre 1 et des valeurs de  $b$  de plus en plus proches de 1.

| $b$                                  | 3 | 2 | 1,5 | 1,1 | 1,01 |
|--------------------------------------|---|---|-----|-----|------|
| $\text{TVM} = \frac{b^2 - 1}{b - 1}$ | 4 | 3 | 2,5 | 2,1 | 2,01 |

Les pentes des sécantes s'approchent de 2. On peut le confirmer algébriquement : pour  $b \neq 1$ ,

$$\frac{b^2 - 1}{b - 1} = \frac{(b - 1)(b + 1)}{b - 1} = b + 1 \xrightarrow{b \rightarrow 1} 2.$$

#### Définition 4.2 — Taux de variation instantané (TVI)

Le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = a$  est la limite des taux de variation moyens quand la seconde borne tend vers  $a$  :

$$\text{TVI} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Géométriquement, c'est la pende de la tangente à la courbe au point  $(a, f(a))$ .

|           | <b>TVM</b>                    | <b>TVI</b>                     |
|-----------|-------------------------------|--------------------------------|
| Porte sur | un <i>intervalle</i> $[a, b]$ | un <i>point</i> $x = a$        |
| Calcul    | un quotient                   | une <i>limite</i> de quotients |
| Géométrie | pende d'une <b>sécante</b>    | pende d'une <b>tangente</b>    |
| Exemple   | vitesse moyenne               | vitesse instantanée            |

#### Capsule historique — Newton, Leibniz et deux notations

Isaac Newton appelait fluxions les *taux de variation instantanés* et les notait  $\dot{x}$  ; il pensait au mouvement des corps. Gottfried Wilhelm Leibniz, lui, raisonnait sur des *accroissements infiniment petits* et écrivait  $\frac{dy}{dx}$ . Une querelle de priorité féroce les a opposés, mais c'est la notation de Leibniz qui a survécu dans les sciences — parce qu'elle rappelle visuellement le quotient  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  dont elle est issue.

**Exemple 4.4 — Calcul d'un TVI — exemple modèle**

Reprends  $s(t) = 5t^2$  (position en mètres,  $t$  en secondes). Calcule la vitesse instantanée du mobile à  $t = 2$  s.

**Solution. Étape 1 — Écrire la définition.**

$$\text{TVI} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}.$$

**Étape 2 — Substituer.** On sait que  $s(2) = 20$  :

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{5t^2 - 20}{t - 2}.$$

**Étape 3 — Lever l'indétermination.** L'évaluation directe donne  $\frac{0}{0}$ . On met 5 en évidence, puis on factorise la différence de carrés :

$$\frac{5t^2 - 20}{t - 2} = \frac{5(t^2 - 4)}{t - 2} = \frac{5(t - 2)(t + 2)}{t - 2} = 5(t + 2) \quad (t \neq 2).$$

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$\lim_{t \rightarrow 2} 5(t + 2) = 5(4) = 20.$$

**Interprétation.** À l'instant précis  $t = 2$  s, le mobile se déplace à 20 m/s. Compare avec l'exemple 4.2 : la vitesse *moyenne* entre 2 s et 4 s était de 30 m/s, alors que la vitesse *instantanée* à 2 s est de 20 m/s. Ce sont deux quantités différentes.

**Exemple 4.5 — Distinguer TVM et TVI**

Soit  $f(x) = x^2 + 1$ . Calcule (a) le TVM entre  $x = 0$  et  $x = 2$ , puis (b) le TVI en  $x = 1$ . Compare.

**Solution.**

(a) Le TVM entre 0 et 2.

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 5.$$

$$\text{TVM} = \frac{5 - 1}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

(b) Le TVI en  $x = 1$ . On a  $f(1) = 2$ , donc

$$\text{TVI} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Forme  $\frac{0}{0}$  ; on factorise :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

**Comparaison.** Les deux valent 2, mais elles ne disent pas la même chose : le TVM décrit le comportement *moyen* sur tout l'intervalle  $[0, 2]$ , alors que le TVI décrit le comportement *ponctuel* en  $x = 1$ . Que les deux coïncident ici est une particularité de cette fonction sur cet intervalle, pas une règle.

### 4.3 La dérivée : définition et notations

Le TVI se calcule en un point  $a$  précis. Mais on peut le calculer en *n'importe quel* point : on obtient alors une nouvelle *fonction*, qui à chaque  $x$  associe la pente de la tangente en ce point. C'est la *fonction dérivée*.

Il est commode de réécrire la limite en posant  $h = b - a$ , de sorte que  $b = a + h$  et que  $b \rightarrow a$  devienne  $h \rightarrow 0$ .

#### À mémoriser — Formule 4.1 : Définition de la dérivée

La dérivée de la fonction  $f$  est la fonction  $f'$  définie par

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

lorsque cette limite existe.

#### À mémoriser — Formule 4.2 : Les deux notations équivalentes

Si  $y = f(x)$ , les écritures suivantes désignent toutes la *même* chose :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] = y'.$$

**Remarque.** La notation  $\frac{dy}{dx}$  est celle de **Leibniz**. Elle provient directement du quotient  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  : quand  $\Delta x$  devient infiniment petit, on remplace les  $\Delta$  par des  $d$ . C'est la notation dominante en physique, en chimie et en biologie ; tu la rencontreras dans tous tes autres cours de sciences de la nature. Habitue-toi à passer de l'une à l'autre sans effort.



**Attention**

La notation  $\frac{dy}{dx}$  n'est **pas** une vraie fraction :  $dy$  et  $dx$  ne sont pas des nombres qu'on peut séparer à sa guise. C'est un symbole global qui signifie « dérivée de  $y$  par rapport à  $x$  ». L'avantage, c'est qu'elle indique explicitement *par rapport à quelle variable* on dérive — ce qui devient crucial dès qu'il y a plusieurs variables en jeu.

**Remarque.** Le nom de la variable n'a aucune importance. Si la position d'un mobile est  $s(t)$ , sa vitesse s'écrit

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt},$$

et la notation de Leibniz rappelle immédiatement que les unités sont des « unités de  $s$  par unité de  $t$  », soit des mètres par seconde.

## 4.4 Calculer une dérivée à partir de la définition

On applique maintenant la définition. La démarche est toujours la même, et l'étape délicate est toujours la même aussi : lever la forme  $\frac{0}{0}$ .

### Méthode 4.1 — Calculer $f'(x)$ par la définition

1. Calcule  $f(x+h)$  en remplaçant *chaque*  $x$  par  $(x+h)$ .
2. Forme la différence  $f(x+h) - f(x)$  et simplifie-la au maximum.
3. Divise par  $h$  ; le facteur  $h$  doit se simplifier.
4. Évalue la limite quand  $h \rightarrow 0$ .

### Exemple 4.6 — Dérivée d'une fonction quadratique — exemple modèle

Calcule la dérivée de  $f(x) = x^2$  à partir de la définition.

**Solution.** **Étape 1 — Calculer  $f(x+h)$ .** On remplace  $x$  par  $(x+h)$  partout, puis on développe :

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

**Étape 2 — Former la différence.**

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2) - x^2 \\ &= 2xh + h^2. \end{aligned}$$

Les  $x^2$  se sont annulés — c'est toujours bon signe.

**Étape 3 — Diviser par  $h$ .** On met  $h$  en évidence au numérateur :

$$\frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \quad (h \neq 0).$$

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

**Réponse.** En notation de Leibniz :

$$f'(x) = 2x \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Vérification : en  $x = 1$ , on obtient  $f'(1) = 2$ , ce qui correspond exactement à la pente trouvée numériquement à la section 4.2.

#### Exemple 4.7 — Dérivée d'une fonction affine

Calcule la dérivée de  $f(x) = 3x - 5$  à partir de la définition.

**Solution.**

**Étape 1 — Calculer  $f(x + h)$ .**

$$f(x + h) = 3(x + h) - 5 = 3x + 3h - 5.$$

**Étape 2 — Former la différence.**

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= (3x + 3h - 5) - (3x - 5) \\ &= 3x + 3h - 5 - 3x + 5 \\ &= 3h. \end{aligned}$$

**Étape 3 — Diviser par  $h$ .**

$$\frac{3h}{h} = 3 \quad (h \neq 0).$$

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3.$$

**Interprétation.** La dérivée est constante et vaut 3 : c'est logique, puisque le graphique de  $f$  est une droite de pente 3. La tangente à une droite, c'est la droite elle-même.

#### Exemple 4.8 — Dérivée d'une fonction rationnelle

Calcule la dérivée de  $f(x) = \frac{1}{x}$  à partir de la définition.

**Solution.**

**Étape 1 — Calculer  $f(x + h)$ .**

$$f(x + h) = \frac{1}{x + h}.$$

**Étape 2 — Former la différence.** On met au dénominateur commun  $x(x + h)$  :

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{x(x + h)} - \frac{x + h}{x(x + h)} \\ &= \frac{x - (x + h)}{x(x + h)} = \frac{-h}{x(x + h)}. \end{aligned}$$

**Étape 3 — Diviser par  $h$ .** Diviser par  $h$ , c'est multiplier par  $\frac{1}{h}$  :

$$\frac{-h}{x(x + h)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{x(x + h)} \quad (h \neq 0).$$

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + h)} = \frac{-1}{x(x + 0)} = -\frac{1}{x^2}.$$

**Réponse.**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

#### Exemple 4.9 — Dérivée d'une fonction avec radical

Calcule la dérivée de  $f(x) = \sqrt{x}$  à partir de la définition.

**Solution.**

**Étape 1 — Calculer  $f(x+h)$ .**

$$f(x+h) = \sqrt{x+h}.$$

**Étape 2 — Former le quotient.**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Ici la simplification n'est pas immédiate : il faut le *conjugué* (technique du chapitre 2).

**Étape 3 — Multiplier par le conjugué.**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (h \neq 0). \end{aligned}$$

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Réponse.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Note que la dérivée n'existe pas en  $x = 0$ , alors que  $f(0) = 0$  existe pourtant. On y reviendra à la section 4.6.

#### Exemple 4.10 — Dérivée d'un polynôme du second degré

Calcule la dérivée de  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$  à partir de la définition.

**Solution.**

**Étape 1 — Calculer  $f(x + h)$ .**

$$\begin{aligned} f(x + h) &= 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 \\ &= 3(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 1 \\ &= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1. \end{aligned}$$

**Étape 2 — Former la différence.**

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= (3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1) - (3x^2 - 5x + 1) \\ &= 6xh + 3h^2 - 5h. \end{aligned}$$

Tous les termes sans  $h$  se sont annulés.

**Étape 3 — Diviser par  $h$ .** On met  $h$  en évidence :

$$\frac{h(6x + 3h - 5)}{h} = 6x + 3h - 5 \quad (h \neq 0).$$

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h - 5) = 6x - 5.$$

**Réponse.**

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 5.$$

## 4.5 La dérivée en un point et son interprétation

Une fois la fonction dérivée obtenue, il suffit d'y substituer une valeur pour connaître la pente de la tangente en ce point.

### À mémoriser — Formule 4.3 : Dérivée en un point

La dérivée de  $f$  au point  $x = a$  se note et se calcule

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}.$$

**Remarque.** La barre verticale de la notation  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$  se lit « évaluée en  $x = a$  ». Elle est indispensable :  $\frac{dy}{dx}$  tout seul désigne la fonction dérivée, pas un nombre.

### À mémoriser — Formule 4.4 : Les trois lectures de la dérivée

Le nombre  $f'(a)$  s'interprète de trois façons équivalentes :

- (1) la pente de la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(a, f(a))$  ;
- (2) le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = a$  ;
- (3) la vitesse à laquelle  $y$  varie par rapport à  $x$  au moment où  $x = a$ .

**Attention**

En sciences, une réponse numérique sans *unités* ni *interprétation* est incomplète. Les unités de  $f'(a)$  sont toujours :

$$\frac{\text{unités de } y}{\text{unité de } x}.$$

Ce critère vaut à lui seul **10 %** de l'épreuve finale — prends-en l'habitude dès maintenant.

**Exemple 4.11 — Calcul et interprétation en un point — exemple modèle**

Soit  $f(x) = x^2$ . On a montré que  $f'(x) = 2x$ . Calcule  $f'(3)$  et interprète.

**Solution.** **Étape 1 — Évaluer la dérivée.**

$$f'(3) = 2(3) = 6.$$

En notation de Leibniz :  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = 6$ .

**Étape 2 — Interpréter.** Les trois lectures :

- la tangente à la courbe  $y = x^2$  au point  $(3, 9)$  a une pente de 6 ;
- le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = 3$  vaut 6 ;
- au moment où  $x$  vaut 3,  $y$  augmente 6 fois plus vite que  $x$ .

**Exemple 4.12 — Vitesse instantanée avec unités**

La position d'un objet en chute libre est  $s(t) = 4,9t^2$  (en mètres,  $t$  en secondes). Sachant que  $\frac{ds}{dt} = 9,8t$ , calcule et interprète la vitesse à  $t = 3$  s.

**Solution.**

**Étape 1 — Évaluer.**

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=3} = 9,8(3) = 29,4.$$

**Étape 2 — Déterminer les unités.** La position  $s$  est en mètres et le temps  $t$  en secondes, donc

$$\frac{\text{unités de } s}{\text{unité de } t} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m/s}.$$

**Interprétation.** À l'instant  $t = 3$  s, l'objet tombe à une vitesse de 29,4 m/s. Le signe positif indique que la distance parcourue *augmente*.

**Exemple 4.13 — Interprétation en contexte chimique**

La concentration d'un réactif dans une solution est  $C(t) = 50 - 2t^2$  (en mol/L,  $t$  en minutes), et sa dérivée est  $\frac{dC}{dt} = -4t$ . Calcule et interprète  $\left. \frac{dC}{dt} \right|_{t=5}$ .

**Solution.**

**Étape 1 — Évaluer.**

$$\left. \frac{dC}{dt} \right|_{t=5} = -4(5) = -20.$$

**Étape 2 — Déterminer les unités.**

$$\frac{\text{mol/L}}{\text{min}} = \text{mol}/(\text{L}\cdot\text{min}).$$

**Interprétation.** À l'instant  $t = 5$  min, la concentration du réactif *diminue* au rythme de 20 mol/(L·min). Le signe **néгатif** est porteur de sens : il indique que la quantité décroît, ce qui est cohérent avec un réactif qui se consomme au fil de la réaction.

## 4.6 La dérivabilité

La dérivée est définie par une *limite* — et une limite n'existe pas toujours. Il faut donc préciser à quelles conditions une fonction admet une dérivée.

### Définition 4.3 — Dérivabilité en un point

Une fonction  $f$  est dérivable en  $x = a$  si la limite

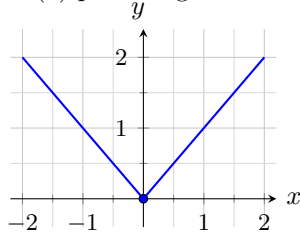
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Dans le cas contraire, on dit que  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ .

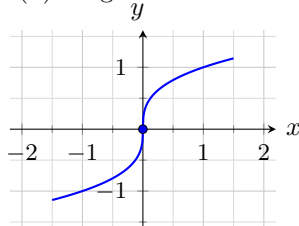
### 4.6.1 Reconnaître graphiquement la non-dérivabilité

Trois situations empêchent une fonction d'être dérivable en un point.

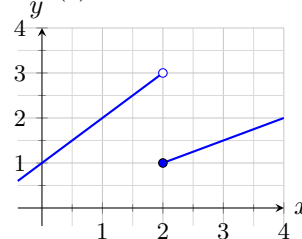
(a) point anguleux



(b) tangente verticale



(c) discontinuité



| Situation              | Pourquoi la dérivée n'existe pas                                                |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| (a) point anguleux     | Les pentes à gauche et à droite diffèrent : la limite du quotient n'existe pas. |
| (b) tangente verticale | La limite du quotient vaut $\pm\infty$ : elle n'est pas finie.                  |
| (c) discontinuité      | La fonction « saute » : aucune tangente ne peut être définie.                   |

**Exemple 4.14 — Non-dérivabilité en un point anguleux — exemple modèle**

Montre que  $f(x) = |x|$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

**Solution. Étape 1 — Écrire le quotient.** Comme  $f(0) = |0| = 0$  :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

**Étape 2 — Limite à droite.** Si  $h > 0$ , alors  $|h| = h$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

**Étape 3 — Limite à gauche.** Si  $h < 0$ , alors  $|h| = -h$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

**Étape 4 — Conclusion.** Les deux limites latérales existent mais diffèrent ( $1 \neq -1$ ), donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \text{ n'existe pas.}$$

La fonction  $f(x) = |x|$  n'est **pas dérivable** en  $x = 0$ .

**Lecture graphique.** À droite de 0, la courbe a une pente de 1 ; à gauche, une pente de -1. Il y a un *point anguleux* : on ne peut pas y tracer une tangente unique.

**4.6.2 Le lien entre continuité et dérivabilité****Théorème 4.1 — Dérivabilité  $\Rightarrow$  continuité**

Si  $f$  est dérivable en  $x = a$ , alors  $f$  est continue en  $x = a$ .

**Attention**

La réciproque est **fausse**. Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable :  $f(x) = |x|$  en est la preuve. Elle est continue en  $x = 0$  (aucune coupure), mais pas dérivable (point anguleux).

Retiens la hiérarchie :

$$\text{dérivable} \implies \text{continue}, \quad \text{mais} \quad \text{continue} \not\Rightarrow \text{dérivable}.$$

**Remarque.** La forme *contraposée* du théorème est souvent la plus utile en pratique : si  $f$  n'est **pas continue** en  $a$ , alors elle n'est **pas dérivable** en  $a$ . Cela permet d'écarter immédiatement tous les points de discontinuité, sans calcul.

**Exemple 4.15 — Continue mais non dérivable**

Soit  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . On admet que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Est-elle dérivable en  $x = 0$  ?

**Solution.**



**Étape 1 — Écrire le quotient.** Comme  $f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$  :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{1/3}}{h}.$$

**Étape 2 — Simplifier avec les lois des exposants.**

$$\frac{h^{1/3}}{h^1} = h^{1/3-1} = h^{-2/3} = \frac{1}{h^{2/3}}.$$

**Étape 3 — Évaluer la limite.** Quand  $h \rightarrow 0$ , le dénominateur  $h^{2/3}$  tend vers 0 par valeurs *positives* (l'exposant  $2/3$  produit un résultat positif des deux côtés). Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

**Conclusion.** La limite n'est pas finie :  $f$  n'est **pas dérivable** en  $x = 0$ , bien qu'elle y soit **continue**. Graphiquement, la courbe présente une *tangente verticale* à l'origine — c'est le cas (b) de la figure précédente.

#### Exemple 4.16 — Discontinuité donc non-dérivabilité

Soit

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2, \\ x^2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

La fonction  $g$  est-elle dérivable en  $x = 2$  ?

**Solution.**

**Étape 1 — Vérifier d'abord la continuité.** C'est le réflexe à avoir : on utilise la contraposée du théorème.

$$g(2) = (2)^2 = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2 + 1 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = (2)^2 = 4.$$

**Étape 2 — Conclure sur la continuité.** Comme  $3 \neq 4$ , la limite  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  n'existe pas :  $g$  est **discontinue** en  $x = 2$ .

**Étape 3 — Conclure sur la dérivabilité.** Par la contraposée du théorème, une fonction non continue en un point ne peut pas y être dérivable. Donc  $g$  n'est **pas dérivable** en  $x = 2$ .

Aucun calcul de limite du quotient différentiel n'a été nécessaire : la discontinuité suffisait à conclure.

## Résumé du chapitre

### Les définitions clés

| Notion           | Formule                                                  | Géométrie            |
|------------------|----------------------------------------------------------|----------------------|
| TVM sur $[a, b]$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  | pende de la sécante  |
| TVI en $a$       | $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$       | pende de la tangente |
| Dérivée          | $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ | fonction des pentes  |
| En un point      | $f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=a}$             | pende en $(a, f(a))$ |

### Les notations équivalentes

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] = y'$$

Pour une fonction du temps  $s(t) : s'(t) = \frac{ds}{dt}$ .

### Dérivabilité

- $f$  est dérivable en  $a$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe et est *finie*.
- Trois obstacles : point anguleux, tangente verticale, discontinuité.
- **Dérivable**  $\Rightarrow$  **continue**, mais la réciproque est fausse ( $|x|$  en 0).
- Contraposée utile : *pas continue*  $\Rightarrow$  *pas dérivable*.

### À ne pas oublier

- Un TVM porte sur un *intervalle* ; un TVI porte sur un *point*.
- Les unités de  $f'(a)$  sont toujours  $\frac{\text{unités de } y}{\text{unité de } x}$ .
- Le *signe* de la dérivée est porteur de sens : positif, la quantité augmente ; négatif, elle diminue.
- Dans le calcul par la définition, le facteur  $h$  doit toujours se simplifier — sinon, c'est qu'il y a une erreur d'algèbre.

# Partie 1 — Énoncés

*Ces exercices accompagnent le chapitre qui précède. Les indices, les réponses finales et les démarches détaillées se trouvent dans les parties suivantes.*

1. VRAI OU FAUX · FACILE · 3 min  
[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Vrai ou faux ? Le taux de variation moyen d'une fonction dépend de l'intervalle sur lequel on le calcule.

|      |      |
|------|------|
| Vrai | Faux |
|------|------|

2. CALCUL · MOYEN · 5 min  
[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

La position d'un mobile est  $s(t) = t^2 + 3t$ , où  $s$  est en mètres et  $t$  en secondes. Calcule sa vitesse instantanée à  $t = 2$  s par la définition, avec les unités.

3. VRAI OU FAUX · MOYEN · 3 min  
[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Vrai ou faux ? Le taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle ne peut jamais être égal à son taux de variation instantané en un point de cet intervalle.

|      |      |
|------|------|
| Vrai | Faux |
|------|------|

4. VRAI OU FAUX · FACILE · 3 min  
[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Vrai ou faux ? La notation  $\frac{dy}{dx}$  désigne une véritable fraction, dont on peut séparer le numérateur  $dy$  et le dénominateur  $dx$ .

|      |      |
|------|------|
| Vrai | Faux |
|------|------|

5. CALCUL · FACILE · 4 min  
[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Soit  $f(x) = 7$ , une fonction constante. Calcule sa dérivée à partir de la définition et interprète le résultat.

6. CHOIX MULTIPLE · MOYEN · 3 min  
[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Le nombre  $f'(3) = 5$  peut s'interpréter de plusieurs façons. Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

- a) La tangente à la courbe au point d'abscisse 3 a une pente de 5
- b) Le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = 3$  vaut 5

- c) La valeur de la fonction en  $x = 3$  est 5  
d) Au moment où  $x$  vaut 3,  $y$  augmente 5 fois plus vite que  $x$

**7.**

CALCUL · MOYEN · 6 min

[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Montre que  $f(x) = |x|$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

**8.**

VRAI OU FAUX · MOYEN · 4 min

[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Vrai ou faux ? Si une fonction est continue en un point, alors elle y est dérivable.

☐ Vrai☐ Faux**9.**

PROBLÈME · DIFFICILE · 12 min

[indice](#) | [réponse](#) | [démarche](#)

Soit  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$

- (a) Montre que  $f$  est continue en  $x = 1$ .  
(b) Calcule les deux limites latérales du quotient différentiel en  $x = 1$ .  
(c) La fonction est-elle dérivable en  $x = 1$  ? Que peut-on en conclure ?

## Partie 2 — Indices

*Un indice oriente sans résoudre. Si tu bloques encore après l'avoir lu, passe à la réponse finale pour vérifier ta piste.*

1. Prends une fonction simple et calcule son TVM sur deux intervalles différents. Obtiens-tu la même valeur ? [↔ énoncé](#)
2. Écris d'abord la limite, puis factorise le numérateur en vérifiant qu'il s'annule bien en  $t = 2$ . [↔ énoncé](#)
3. Pense à une fonction dont le taux de variation est le même partout. Que vaut alors chacune des deux mesures ? [↔ énoncé](#)
4. Relis l'encadré « Attention » de la section 4.3. Que dit-il du statut de cette notation ? [↔ énoncé](#)
5. Que vaut  $f(x + h)$  pour une fonction constante ? La réponse est plus simple qu'il n'y paraît. [↔ énoncé](#)
6. Trois de ces lectures figurent dans l'encadré du cours. La quatrième confond deux quantités bien distinctes. [↔ énoncé](#)
7. Écris le quotient différentiel en 0, puis calcule ses deux limites latérales séparément. Comment s'écrit  $|h|$  selon le signe de  $h$  ? [↔ énoncé](#)
8. Le théorème du cours énonce une implication. Va-t-elle dans ce sens-là, ou dans l'autre ? [↔ énoncé](#)
9. Pour (b), la branche à utiliser dépend du signe de  $h$  : si  $h < 0$  alors  $1 + h < 1$ , et c'est la branche  $x^2$  qui s'applique. [↔ énoncé](#)



## Partie 3 — Réponses finales

*Cette partie te permet de valider ton travail sans voir la démarche. Si ta réponse diffère, reprends ton calcul avant d'ouvrir la partie 4.*

1. Vrai ↔ énoncé
2. 7 m/s ↔ énoncé
3. Faux ↔ énoncé
4. Faux ↔ énoncé
5.  $f'(x) = 0$  : le graphique est une droite horizontale, de pente nulle ↔ énoncé
6. La valeur de la fonction en  $x = 3$  est 5 ↔ énoncé
7. Les limites latérales du quotient valent 1 et  $-1$  : elles diffèrent, donc  $f'(0)$  n'existe pas ↔ énoncé
8. Faux ↔ énoncé
9. (a) continue      (b) limite à gauche = 2, limite à droite = 1      (c) non dérivable : la continuité n'entraîne pas la dérivabilité ↔ énoncé





## Partie 4 — Démarches détaillées

1.

[↔ énoncé](#)

Vrai ou faux ? Le taux de variation moyen d'une fonction dépend de l'intervalle sur lequel on le calcule.

**Solution.** Le TVM se définit *toujours* par rapport à un intervalle précis :

$$\text{TVM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Changer  $a$  ou  $b$  change généralement le résultat.

**Exemple.** Pour  $f(x) = x^2$  :

$$\begin{aligned} \text{sur } [0, 1] : \quad & \frac{1 - 0}{1} = 1, \\ \text{sur } [1, 2] : \quad & \frac{4 - 1}{1} = 3, \\ \text{sur } [2, 3] : \quad & \frac{9 - 4}{1} = 5. \end{aligned}$$

Trois intervalles de même longueur, trois TVM différents. L'énoncé est donc **vrai**.

C'est pourquoi on ne dit jamais « le TVM de  $f$  » tout court, mais toujours « le TVM de  $f$  entre  $a$  et  $b$  ».

**Une exception notable :** pour une fonction *affine*  $f(x) = mx + b$ , le TVM vaut  $m$  sur n'importe quel intervalle. C'est précisément ce qui caractérise une droite.

### Attention

**Piège fréquent.** Énoncer un TVM sans préciser l'intervalle auquel il se rapporte.

2.

[↔ énoncé](#)

La position d'un mobile est  $s(t) = t^2 + 3t$ , où  $s$  est en mètres et  $t$  en secondes. Calcule sa vitesse instantanée à  $t = 2$  s par la définition, avec les unités.

**Solution.** Écrire la définition.

$$v(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}.$$

Calculer  $s(2)$ .

$$s(2) = 4 + 6 = 10 \text{ m.}$$

**Substituer.**

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t - 2}.$$

**Vérifier la forme.** En  $t = 2$  :  $4 + 6 - 10 = 0$  au numérateur et 0 au dénominateur. Forme  $\frac{0}{0}$ .

**Factoriser.** On cherche deux nombres de produit  $-10$  et de somme  $3$  : ce sont  $5$  et  $-2$ .

$$t^2 + 3t - 10 = (t + 5)(t - 2).$$

$$\frac{(t + 5)(t - 2)}{t - 2} = t + 5, \quad t \neq 2.$$

**Évaluer.**

$$v(2) = \lim_{t \rightarrow 2} (t + 5) = 7.$$

**Unités et interprétation.** La vitesse est en m/s. À l'instant précis  $t = 2$  s, le mobile se déplace à 7 m/s.

### Attention

**Piège fréquent.** Se tromper de signes en factorisant et obtenir  $(t - 5)(t + 2)$ .

3.

[↔ énoncé](#)

*Vrai ou faux ? Le taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle ne peut jamais être égal à son taux de variation instantané en un point de cet intervalle.*

**Solution.** Rien n'interdit aux deux mesures de coïncider — c'est même systématique pour certaines fonctions.

**Contre-exemple simple.** Soit la fonction affine  $f(x) = 3x + 1$ .

Son TVM sur n'importe quel intervalle  $[a, b]$  vaut

$$\frac{(3b + 1) - (3a + 1)}{b - a} = \frac{3(b - a)}{b - a} = 3.$$

Son TVI en n'importe quel point vaut également 3, puisque la tangente à une droite est la droite elle-même.

Les deux mesures coïncident donc partout : l'énoncé est **faux**.

**Autre exemple.** Pour  $f(x) = x^2$  sur  $[0, 2]$ , le TVM vaut  $\frac{4 - 0}{2} = 2$ . Or le TVI en  $x = 1$  vaut aussi 2.

Ici l'égalité ne tient qu'en un point bien précis de l'intervalle, mais elle existe bel et bien.

### Attention

**Piège fréquent.** Croire que la distinction entre TVM et TVI implique qu'ils soient toujours différents.

4.

[↔ énoncé](#)

Vrai ou faux ? La notation  $\frac{dy}{dx}$  désigne une véritable fraction, dont on peut séparer le numérateur  $dy$  et le dénominateur  $dx$ .

**Solution.** La notation  $\frac{dy}{dx}$  est un **symbole global** qui signifie « dérivée de  $y$  par rapport à  $x$  ». Les éléments  $dy$  et  $dx$  ne sont pas des nombres qu'on peut isoler.

L'énoncé est donc **faux**.

**D'où vient alors cette forme de fraction ?** Elle rappelle son origine : le quotient  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  du taux de variation moyen, dont la dérivée est la limite quand  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Cette parenté rend la notation très commode. Elle indique immédiatement les *unités* — si  $y$  est en mètres et  $x$  en secondes,  $\frac{dy}{dx}$  est en m/s.

Elle rend aussi la dérivation en chaîne très lisible :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

où les  $du$  semblent se simplifier. Mais ce n'est qu'un *moyen mnémotechnique*, pas une simplification de fraction au sens algébrique.

### Attention

**Piège fréquent.** Manipuler  $dy$  et  $dx$  comme des quantités algébriques indépendantes.

5.

[↔ énoncé](#)

Soit  $f(x) = 7$ , une fonction constante. Calcule sa dérivée à partir de la définition et interprète le résultat.

**Solution.** **Étape 1 — Calculer  $f(x+h)$ .** La fonction vaut 7 *quelle que soit* la valeur d'entrée :

$$f(x+h) = 7.$$

**Étape 2 — Former la différence.**

$$f(x+h) - f(x) = 7 - 7 = 0.$$

**Étape 3 — Diviser par  $h$ .**

$$\frac{0}{h} = 0, \quad h \neq 0.$$

Noter que  $\frac{0}{h}$  vaut bien 0 tant que  $h \neq 0$  : il n'y a aucune indétermination ici.

**Étape 4 — Évaluer la limite.**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

**Interprétation.** Le graphique de  $f$  est une droite *horizontale*, dont la pente est nulle en tout point. La fonction ne varie jamais, donc son taux de variation est nul partout.

Ce résultat se généralise : la dérivée de toute fonction constante est 0.

**Attention**

**Piège fréquent.** Croire que  $f(x + h) = 7 + h$ , en appliquant le décalage à la valeur de sortie plutôt qu'à l'entrée.

6.

[↔ énoncé](#)

Le nombre  $f'(3) = 5$  peut s'interpréter de plusieurs façons. Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte ?

**Solution.** Le cours énonce **trois** lectures équivalentes du nombre  $f'(a)$  :

(1) **Géométrique.** C'est la pente de la tangente à la courbe au point  $(a, f(a))$ .

(2) **En termes de variation.** C'est le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = a$ .

(3) **En termes de vitesse.** C'est la vitesse à laquelle  $y$  varie par rapport à  $x$  au moment où  $x = a$ .

Appliquées à  $f'(3) = 5$ , ces trois lectures donnent : la tangente au point d'abscisse 3 a une pente de 5 ; le TVI en  $x = 3$  vaut 5 ; au moment où  $x$  vaut 3,  $y$  augmente 5 fois plus vite que  $x$ .

L'affirmation (c) n'en fait pas partie : elle prétend que la valeur de la fonction en  $x = 3$  est 5, ce qui confond  $f'(3)$  avec  $f(3)$ .

Ce sont deux quantités sans rapport. Une fonction peut valoir 100 en  $x = 3$  tout en  $y$  ayant une dérivée nulle, ou valoir 0 tout en  $y$  croissant très vite.

**Analyse des choix**

- a) La tangente à la courbe au point d'abscisse 3 a une pente de 5 — C'est la lecture géométrique, parfaitement correcte.
- b) Le taux de variation instantané de  $f$  en  $x = 3$  vaut 5 — C'est la lecture en termes de variation, également correcte : la dérivée en un point *est* le TVI en ce point.
- c) La valeur de la fonction en  $x = 3$  est 5 (**bonne réponse**) — C'est confondre  $f'(3)$  avec  $f(3)$ . La dérivée mesure une *vitesse de changement*, jamais une valeur de la fonction.
- d) Au moment où  $x$  vaut 3,  $y$  augmente 5 fois plus vite que  $x$  — C'est la lecture en termes de vitesse relative, correcte elle aussi.

**Attention**

**Piège fréquent.** Confondre la valeur de la fonction et la valeur de sa dérivée en un même point.

7.

[↔ énoncé](#)

Montre que  $f(x) = |x|$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

**Solution.** **Étape 1 — Écrire le quotient différentiel en 0.** Comme  $f(0) = |0| = 0$  :

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

**Étape 2 — Limite à droite.** Si  $h > 0$ , alors  $|h| = h$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

**Étape 3 — Limite à gauche.** Si  $h < 0$ , alors  $|h| = -h$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

**Étape 4 — Conclusion.** Les deux limites latérales existent mais diffèrent :

$$1 \neq -1.$$

La limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$  n'existe donc pas, et  $f$  n'est **pas dérivable** en  $x = 0$ .

**Lecture graphique.** À droite de 0, la courbe a une pente de 1 ; à gauche, une pente de  $-1$ . Il y a un *point anguleux* : aucune tangente unique ne peut y être tracée.

**Remarque importante.** La fonction est pourtant *continue* en 0 : on peut tracer son graphique sans lever le crayon. C'est le contre-exemple classique montrant que la continuité n'entraîne pas la dérivabilité.

#### Attention

**Piège fréquent.** Simplifier  $\frac{|h|}{h}$  en 1 sans distinguer le signe de  $h$ .

8.

[↔ énoncé](#)

**Vrai ou faux ?** Si une fonction est continue en un point, alors elle y est dérivable.

**Solution.** Le théorème du cours énonce l'implication dans le sens **inverse** :

$$\text{dérivable en } a \implies \text{continue en } a.$$

L'énoncé propose la *reciproque*, qui est **fausse**.

**Contre-exemple.** Soit  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$ .

Cette fonction est *continue* en 0 : on vérifie les trois conditions du chapitre 3, et  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$ .

Mais elle n'y est *pas dérivable* : les limites latérales du quotient différentiel valent 1 et  $-1$ .

La continuité ne suffit donc pas à garantir la dérivabilité. L'énoncé est faux.

**La hiérarchie correcte** est la suivante :

$$\text{dérivable} \implies \text{continue}, \quad \text{mais} \quad \text{continue} \not\Rightarrow \text{dérivable}.$$

Autrement dit, la dérivabilité est une condition *plus forte* que la continuité : elle exige non seulement l'absence de coupure, mais aussi l'absence de coin ou de tangente verticale.

#### Attention

**Piège fréquent.** Inverser le sens de l'implication du théorème.

9.

[↔ énoncé](#)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(a) Montre que  $f$  est continue en  $x = 1$ .

(b) Calcule les deux limites latérales du quotient différentiel en  $x = 1$ .

(c) La fonction est-elle dérivable en  $x = 1$  ? Que peut-on en conclure ?

**Solution.** (a) **Continuité en  $x = 1$ .** On vérifie les trois conditions du chapitre 3.

C1. Le symbole  $\leq$  place  $x = 1$  dans la première branche :

$$f(1) = 1^2 = 1. \quad \checkmark$$

C2. Les deux limites latérales :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1. \end{aligned}$$

Elles sont égales, donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  existe.  $\checkmark$

C3.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$ .  $\checkmark$

Les trois conditions sont remplies :  $f$  est **continue** en  $x = 1$ .

(b) **Quotient différentiel.** Comme  $f(1) = 1$ , le quotient s'écrit

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{f(1+h) - 1}{h}.$$

*Limite à gauche.* Si  $h < 0$ , alors  $1+h < 1$  et c'est la branche  $x^2$  qui s'applique :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(2+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (2+h) = 2. \end{aligned}$$

*Limite à droite.* Si  $h > 0$ , alors  $1+h > 1$  et c'est la branche  $x$  qui s'applique :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

(c) **Conclusion.** Les deux limites latérales existent mais diffèrent :

$$2 \neq 1.$$

La limite du quotient différentiel n'existe donc pas :  $f$  n'est **pas dérivable** en  $x = 1$ .

**Ce que cet exemple montre.** La fonction est continue en 1 sans y être dérivable. C'est une nouvelle illustration du fait que la continuité est une condition *nécessaire mais non suffisante* de la dérivabilité.

Graphiquement, les deux branches se raccordent sans coupure, mais avec des pentes différentes (2 et 1) : la courbe présente un *point anguleux* en  $(1, 1)$ .

### Attention

**Piège fréquent.** Utiliser la même branche pour les deux limites latérales, en oubliant que le signe de  $h$  détermine de quel côté de 1 on se trouve.